

Exemple

Considérons l'application $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Noyau et image d'une application

Définition 24 (Noyau et image).

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Le *noyau* de T est

L'*image* de T est

Exemples

Chapitre 2 : Calcul Matriciel

But

On a vu que les systèmes d'équations linéaires sont étroitement liés à la notion de matrice, à travers la matrice des coefficients ainsi que la matrice augmentée associées. L'étude plus approfondie des matrices fournira des outils pour la résolution des systèmes :

1. Lorsque A est carrée et que l'application T_A associée est bijective, on utilisera la matrice associée à l'application inverse de T_A .
2. Lorsque la matrice est rectangulaire ($n \neq m$), on travaillera avec des factorisations matricielles.
3. Pour des matrices de grande taille, on pourra les étudier par blocs.

2.1 Opérations matricielles

On note $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ dont les coefficients sont des nombres réels. Considérons une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. On utilisera les notations suivantes :

On notera encore $0_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 0, dite *matrice nulle*, ainsi que $I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matrice carrée qui a des 1 sur la diagonale et dont tous les autres coefficients sont nuls, dite *matrice identité*.

Addition de matrices

Soient $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. On définit la somme $A+B$ de la façon suivante :

Multiplication par un scalaire

Pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λA par

Théorème 13. Soient A, B et $C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors on a

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0_{m \times n} = A$
4. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6. $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$
7. $1 \cdot A = A$
8. $0 \cdot A = 0_{m \times n}$

Ces propriétés découlent de la définition de l'addition des matrices, de la multiplication par un scalaire et des propriétés de $\mathbb{R}$.

Multiplication de matrices

La définition de la multiplication de deux matrices A et B découle naturellement de la composition des applications linéaires T_A et T_B associées.

Définition

Soient $T_B : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ des applications. On définit l'application composée $T_A \circ T_B : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ par

Remarque : Si T_A et T_B sont linéaires, alors l'application composée $T_A \circ T_B$ est aussi linéaire.

Conséquence : La matrice associée à l'application $T_A \circ T_B$ existe.

Exemple

Définition 25 (Produit matriciel).

Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ deux matrices. Alors le produit AB est défini par

Règle ligne-colonne

Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ sont des matrices, alors leur produit $C = AB$ est donné par $C = (c_{ij})$ où

Exemple

Théorème 14. Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice et B et C des matrices telles que les expressions ci-dessous soient définies. On a

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
5. $A = AI_{n \times n} = I_{m \times m}A$

Illustration

Remarques importantes concernant les propriétés du produit matriciel